Тур для початківців

Кожна задача оцінюється в 7 балів.

Задача 1

Знайдіть усі четвірки дійсних чисел (a, b, c, d) такі, що рівності

$$X^2 + aX + b = (X - a)(X - c) \text{ та } X^2 + cX + d = (X - b)(X - d)$$

виконуються при всіх дійсних числах X.

Задача 2

Банк Цюриха виробляє монети з літерою H на одному боці та літерою T на іншому боці. У Аліси є n таких монет, викладених в ряд зліва направо. Вона послідовно виконує таку операцію: якщо хоча б одна з монет лежить літерою H догори, вона обирає групу послідовних монет (ця група повинна містити хоча б одну монету) і перевертає всі монети цієї групи; інакше, всі монеті лежать літерою T догори й вона зупиняється. Наприклад, якщо $n = 3$, Аліса може виконувати такі операції: $THT \to HTH \to HHH \to TTH \to TTT$. Окрім цього, вона також могла б виконати операцію $THT \to TTT$.

Для кожної початкової конфігурації C позначимо за $m(C)$ найменшу кількість операцій, після яких процес може зупинитися. Наприклад, $m(THT) = 1$ і $m(TTT) = 0$. Для кожного натурального числа $n \geq 1$ знайдіть максимальне можливе значення $m(C)$ серед усіх 2^n можливих початкових конфігурацій C.

Задача 3

Нехай A і B – дві різні точки на площині. Нехай M – середина відрізка AB, і нехай ω – коло, що проходить через A і M. Нехай T – така точка на ω, що пряма BT дотикається до ω. Нехай X – така точка (відмінна від B) на прямій AB, що $TB = TX$, і нехай Y – основа перпендикуляра з точки A на пряму BT.

Доведіть, що прямі AT і XY паралельні.

Задача 4

Для всіх дійсних чисел x, позначимо через $\lfloor x \rfloor$ найбільше ціле число, що не перевищує x. Знайдіть усі функції f, що визначені на множині дійсних чисел і приймають дійсні значення, для яких

$$f(x+y) = (-1)^{\lfloor y \rfloor} f(x) + (-1)^{\lfloor x \rfloor} f(y)$$

виконується для всіх дійсних x та y.

Задача 5

Нехай n і k – натуральні числа, і $k \leq 2^n$. Ворона й Корона грають у гру *Докумекай*. На початку гри Ворона обирає натуральне число x таке, що $1 \leq x \leq n$. Корона намагається дізнатись x, задаючи питання, описані нижче. В кожен свій хід, Корона обирає k різних підмножин множини $\{1, 2, \ldots, n\}$ і для кожної обраної множини S задає питання

"Чи належить x множині S?"

Ворона обирає одне з цих k питань і називає Короні питання й відповідь на нього, а та може почати наступний хід.

Знайдіть усі пари (n, k) такі, що незалежно від дій Ворони Корона може абсолютно точно дізнатись x за скінченну кількість ходів.

Задача 6

Для кожного цілого числа n, не рівного 1 або -1, визначимо $S(n)$ як найменше натуральне число, яке більше 1 і ділить n. Зокрема, $S(0) = 2$. Також визначимо $S(1) = S(-1) = 1$.

Нехай f – такий непостійний многочлен з цілими коефіцієнтами, що $S(f(n)) \leq S(n)$ для всіх натуральних чисел n. Доведіть, що $f(0) = 0$.

Зауваження: Непостійний многочлен з цілими коефіцієнтами – це функція вигляду $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$, де k – натуральне й $a_0, a_1, \ldots, a_k$ – цілі, причому $a_k \neq 0$.