



โจทย์ข้อที่ 1

จงหาสี่สิ่งอันดับ (a, b, c, d) ของจำนวนจริงทั้งหมดที่ทำให้สมการ

$$X^2 + aX + b = (X - a)(X - c) \text{ และ } X^2 + cX + d = (X - b)(X - d)$$

เป็นจริงสำหรับทุกจำนวนจริง X

โจทย์ข้อที่ 2

ธนาคารแห่งเมืองซูริคได้แจกจ่ายเหรียญจำนวนหนึ่งที่มีตัวอักษร H บนหน้าหนึ่ง และมีตัวอักษร T บนอีกหน้าหนึ่งของเหรียญ อลิซเรียงเหรียญดังกล่าวจำนวน n เหรียญ เป็นเส้นตรงจากซ้ายไปขวา เขาจะทำกระบวนการต่อไปนี้อย่างซ้ำๆ ถ้ามีเหรียญที่แสดงหน้า H อยู่ เธอจะเลือกกลุ่มของเหรียญจำนวนหนึ่งที่เรียงติดกัน (กลุ่มนี้ต้องมีเหรียญอย่างน้อยหนึ่งเหรียญ) และพลิกเหรียญในกลุ่มนั้นทั้งหมด แต่ถ้าทุกเหรียญแสดงหน้า T เธอจะหยุด

ยกตัวอย่างเช่น เมื่อ $n = 3$ อลิซสามารถทำกระบวนการดังต่อไปนี้ได้: $THT \rightarrow HTH \rightarrow HHH \rightarrow TTH \rightarrow TTT$ หรือเธออาจเลือกที่จะทำกระบวนการ $THT \rightarrow TTT$ ก็ได้

สำหรับแต่ละรูปแบบตั้งต้น C ใดๆ ให้ $m(C)$ แทนจำนวนครั้งที่น้อยที่สุดที่อลิซต้องทำกระบวนการดังกล่าว ตัวอย่างเช่น $m(THT) = 1$ และ $m(TTT) = 0$ สำหรับแต่ละจำนวนเต็ม $n \geq 1$ จงหาค่าสูงสุดของ $m(C)$ เมื่อพิจารณาารูปแบบตั้งต้น C ทั้ง 2^n รูปแบบ

โจทย์ข้อที่ 3

กำหนดให้ A และ B เป็นจุดสองจุดที่แตกต่างกันบนระนาบ

ให้ M เป็นจุดกึ่งกลางของส่วนของเส้นตรง AB และให้ ω เป็นวงกลมที่ผ่านจุด A และ M

ให้ T เป็นจุดบน ω ที่ทำให้เส้นตรง BT สัมผัสกับ ω

ให้ X เป็นจุด (ที่แตกต่างจาก B) บนเส้นตรง AB ที่ทำให้ $TB = TX$ และให้ Y เป็นจุดปลายของส่วนสูงที่ลากจาก A มาตั้งฉากกับเส้นตรง BT

จงพิสูจน์ว่าเส้นตรง AT และ XY ขนานกัน

โจทย์ข้อที่ 4

สำหรับทุกจำนวนจริง x ให้ $[x]$ เป็นจำนวนเต็มที่ยังมากที่สุดที่ไม่เกิน x จงหาฟังก์ชัน f ทั้งหมดที่นิยามบนเซตของจำนวนจริง, ให้ค่าเป็นจำนวนจริง และสอดคล้องกับสมการ

$$f(x+y) = (-1)^{[y]} f(x) + (-1)^{[x]} f(y)$$

สำหรับทุกจำนวนจริง x, y

โจทย์ข้อที่ 5

กำหนดให้ n และ k เป็นจำนวนเต็มบวกที่ $k \leq 2^n$ บานานาและโคโรนากำลังเล่นเกมทายตัวเลขต่อไปนี้ ตอนแรกบานานาจะเลือกจำนวนเต็ม x ซึ่ง $1 \leq x \leq n$ และเก็บไว้เป็นความลับ โคโรนาจะพยายามทาย x โดยการถามคำถามจำนวนหนึ่ง ซึ่งมีรายละเอียดดังต่อไปนี้ ในแต่ละตา โคโรนาจะเลือกสับเซต k สับเซตที่แตกต่างกันของ $\{1, 2, \dots, n\}$ ต่อมาสำหรับแต่ละสับเซต S ที่เลือกมา โคโรนาจะถามคำถามว่า

“ x อยู่ในเซต S ใช่หรือไม่?”

บานานาจะเลือกคำถามหนึ่งคำถามจาก k คำถามที่ได้รับ และบอกคำถามที่เลือกพร้อมกับคำตอบให้กับโคโรนา หลังจากนั้น โคโรนาสามารถเริ่มตาดัดไปได้

จงหาคู่อันดับ (n, k) ทั้งหมดที่ทำให้ไม่ว่าบานานาจะเล่นอย่างไรก็ตาม โคโรนาจะสามารถทายค่า x ได้ในจำนวนจำกัดตา อย่างแน่นอน

โจทย์ข้อที่ 6

สำหรับทุกจำนวนเต็ม n ที่ไม่เท่ากับ 1 หรือ -1 นิยามให้ $S(n)$ เป็นจำนวนเต็มทีน้อยที่สุดที่มากกว่า 1 ที่หาร n ลงตัว เช่น $S(0) = 2$ และนิยามให้ $S(1) = S(-1) = 1$

ให้ f เป็นพหุนามที่ไม่ใช่พหุนามคงตัว และมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม ซึ่งสอดคล้องกับ $S(f(n)) \leq S(n)$ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก n จงพิสูจน์ว่า $f(0) = 0$

หมายเหตุ: พหุนามที่ไม่ใช่พหุนามคงตัว และมีสัมประสิทธิ์เป็นจำนวนเต็ม คือฟังก์ชันที่อยู่ในรูป $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$ เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก และ a_0, a_1, \dots, a_k เป็นจำนวนเต็มซึ่ง $a_k \neq 0$