Тур для начинающих

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Задача 1

Найдите все четверки вещественных чисел (a, b, c, d) такие, что равенства

$$X^2 + aX + b = (X - a)(X - c) \text{ и } X^2 + cX + d = (X - b)(X - d)$$

выполняются при всех вещественных числах X.

Задача 2

Банк Цюриха выпускает монеты с буквой H на одной стороне и буквой T на другой стороне. У Алисы есть n таких монет, выложенных в ряд слева направо. Она последовательно производит следующую операцию: если хотя бы одна из монет лежит буквой H кверху, она выбирает группу последовательных монет (эта группа должна содержать хотя бы одну монету) и переворачивает все монеты этой группы; иначе, все монеты лежат буквой T кверху и она останавливается. Например, если $n = 3$, Алиса может производить такие операции: $THT \to HTH \to HHH \to TTH \to TTT$. Помимо этого, она также могла бы произвести операцию $THT \to TTT$.

Для каждой изначальной конфигурации C обозначим через $m(C)$ наименьшее количество операций, после которых процесс может остановиться. Например, $m(THT) = 1$ и $m(TTT) = 0$. Для каждого натурального числа $n \geq 1$ найдите максимальное возможное значение $m(C)$ среди всех 2^n возможных начальных конфигураций C.

Задача 3

Пусть A и B – две различные точки плоскости. Пусть M – середина отрезка AB, и пусть ω – окружность, проходящая через A и M. Пусть T – такая точка на ω, что прямая BT касается ω. Пусть X – такая точка (отличная от B) на прямой AB, что $TB = TX$, и пусть Y – основание перпендикуляра из точки A на прямую BT.

Докажите, что прямые AT и XY параллельны.

Задача 4

Для всех вещественных чисел x, обозначим через $\lfloor x \rfloor$ наибольшее целое число, не превосходящее x. Найдите все функции f, определенные на множестве вещественных чисел и принимающие вещественные значения, удовлетворяющие

$$f(x+y) = (-1)^{\lfloor y \rfloor} f(x) + (-1)^{\lfloor x \rfloor} f(y)$$

для всех вещественных x и y.

Задача 5

Пусть n и k – натуральные числа, и $k \leq 2^n$. Ворона и Корона играют в следующую версию игры-угадайки. В начале игры Ворона выбирает натуральное число x такое, что $1 \leq x \leq n$. Корона пытается узнать x, задавая вопросы, описанные ниже. В каждый свой ход Корона выбирает k различных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и для каждого выбранного множетсва S задает вопрос

“Принадлежит ли x множетсву S?”

Ворона выбирает один из этих k вопросов и говорит Короне вопрос и ответ на него, а та может начать следующий ход.

Найдите все пары (n, k) такие, что в независимости от действий Вороны Корона может абсолютно точно узнать x за конечное количество ходов.

Задача 6

Для каждого целого числа n, не равного 1 или -1, определим $S(n)$ как наименьшее натуральное число, большее 1 и делящее n. В частности, $S(0) = 2$. Также определим $S(1) = S(-1) = 1$.

Пусть f – такой непостоянный многочлен с целыми коэффициентами, что $S(f(n)) \leq S(n)$ для всех натуральных чисел n. Докажите, что $f(0) = 0$.

Примечание: Непостоянный многочлен с целыми коэффициентами – это функция вида $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$, где k – натуральное и $a_0, a_1, \ldots, a_k$ – целые, причем $a_k \neq 0$.