Livello: per principianti

Ogni problema vale 7 punti.

Problema 1

Determinare tutte le quadruple (a, b, c, d) di numeri reali tali che le uguaglianze

$$X^2 + aX + b = (X - a)(X - c) \text{ and } X^2 + cX + d = (X - b)(X - d)$$

siano vere per ogni reale X.

Problema 2

La Banca di Zurigo ha coniato delle monete con una H su un lato e una T sull'altro. Sia n un intero positivo. Alessandra ha n di queste monete allineate da sinistra a destra. Compie ripetutamente la seguente operazione: se almeno una delle monete mostra una H, sceglie un gruppo non vuoto di monete consecutive e le gira tutte; altrimenti, tutte le monete mostrano T e Alessandra si ferma. Per esempio, se $n = 3$, Alessandra può compiere le seguenti operazioni: $THT \to HTH \to HHH \to TTH \to TTT$. Potrebbe anche scegliere di compiere l'operazione $THT \to TTT$.

Per ogni configurazione iniziale C, sia $m(C)$ il minimo numero di operazioni che Alessandra deve compiere. Per esempio, $m(THT) = 1$ e $m(TTT) = 0$. Determinare il più grande valore assunto da $m(C)$ al variare di C tra le 2^n possibili configurazioni iniziali.

Problema 3

Siano A e B due punti distinti nel piano. Siano M il punto medio di AB e ω una circonferenza passante per A e M. Sia T un punto su ω tale che la retta BT sia tangente a ω. Sia X un punto sulla retta AB diverso da A tale che $TB = TX$. Sia Y la proiezione di A sulla retta BT. Dimostrare che le rette AT e XY sono parallele.

Problema 4

Per ogni numero reale x, definiamo $\lfloor x \rfloor$ come il più grande intero minore o uguale a x. Determinare tutte le funzioni f di variabile reale che assumono valori reali tali che

$$f(x+y) = (-1)^{\lfloor y \rfloor} f(x) + (-1)^{\lfloor x \rfloor} f(y)$$

per ogni coppia (x, y) di numeri reali.

Problema 5

Siano n e k interi positivi tali che $k \leq 2^n$. Alberto e Barbara giocheranno al seguente gioco. Innanzitutto, Alberto sceglie segretamente un intero x tale che $1 \leq x \leq n$. Barbara tenterà di determinare x facendo ad Alberto alcune domande: in ciascun turno, Barbara sceglie k sottoinsiemi distinti di $\{1, 2, \cdots, n\}$ e poi, per ogni insieme S scelto, pone la domanda

"x appartiene a S?"

Successivamente Alberto dovrà scegliere una domanda e rispondervi. Barbara sa a quale domanda Alberto sta rispondendo. A questo punto, inizia il turno successivo.

Determinare, con dimostrazione, tutte le coppie (n, k) tali che Barbara sia in grado di determinare x in un numero finito di mosse.

Problema 6

Per ogni intero n diverso da 1 e da -1, sia $S(n)$ il più piccolo intero maggiore di 1 che divide n. In particolare $S(0) = 2$. Definiamo inoltre $S(1) = S(-1) = 1$.

Sia f un polinomio non costante a coefficienti interi tale che $S(f(n)) \leq S(n)$ per ogni intero positivo n. Dimostrare che $f(0) = 0$.

Nota: Un polinomio non costante a coefficienti interi è una funzione della forma $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$, dove k è un intero positivo e $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sono interi tali che $a_k \neq 0$.