Kezdő szint

Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont szerezhető.

1. feladat

Adjuk meg az összes valós (a, b, c, d) számnégyest, amelyekre az

$$X^2 + aX + b = (X-a)(X-c) \quad \text{és} \quad X^2 + cX + d = (X-b)(X-d)$$

egyenlőség minden valós X esetén teljesül.

2. feladat

A Zürichi Bank olyan érméket bocsát ki, melyek egyik oldalán egy F, a másikon egy I betű szerepel. Alíznak n érméje van, amelyeket egy sorban rendezett el balról jobbra. A következő játékot játssza: ha van olyan érme, amelyiken F látható, akkor kiválaszt néhány egymást követő érmét (legalább egyet), és ezeket mind megfordítja. Ha már nincs ilyen érme, Alíz abbahagyja a játékot. Például ha $n = 3$, akkor Alíz játszhat a következőképpen: $IFI \to FIF \to FFF \to IIF \to III$, vagy akár $IFI \to III$ módon is.

Egy C kezdőállapotra jelölje $m(C)$ a legkevesebb lépést, amelyből Alíz el tud jutni a játék végére. Tehát például $m(IFI) = 1$, $m(III) = 0$. Minden n-re határozzuk meg $m(C)$ legnagyobb értékét a 2^n darab n hosszú C kezdőállás esetén.

3. feladat

Legyen A és B a sík két különböző pontja. Jelölje M az AB szakasz felezőpontját, ω pedig legyen egy kör, amely áthalad A és M pontokon. Legyen T pont az ω körön úgy, hogy a BT egyenes érinti ω-t. Legyen X az a (B-től különböző) pont az AB egyenesen, amelyre $TB = TX$, jelölje az A pontból a BT egyenesre állított merőleges talppontját Y.

Bizonyítsuk be, hogy AT és XY egyenesek párhuzamosak.

4. feladat

Ha x valós szám, akkor $\lfloor x \rfloor$ jelöli x egészrészét, vagyis a legnagyobb x-nél nem nagyobb egész számot. Adjuk meg az összes olyan f függvényt, amely a valós számokon van értelmezve és valós értékeket vesz fel, valamint minden valós x, y számpárra

$$f(x+y) = (-1)^{\lfloor y \rfloor} f(x) + (-1)^{\lfloor x \rfloor} f(y)$$

teljesül.

5. feladat

Legyenek n és k olyan pozitív egészek, amelyekre $k \leq 2^n$. Banana és Corona egy módosított barkochba játékot játszanak. Banana gondol egy n-nél nem nagyobb x pozitív egész számra, Corona pedig megpróbálja kitalálni a számot a következő szabályok szerint: minden körben kiválasztja k különböző részhalmazát az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, majd minden kiválasztott S részhalmazra megkérdezi, hogy x benne van-e S-ben. Ezután Banana pontosan egy kérdésre válaszol ezek közül, a kérdést a válasszal együtt elárulja Coronának.

Adjuk meg az összes olyan (n, k) számpárt, amelyek esetén Corona biztosan ki tudja találni x-et véges sok kérdéssel.

6. feladat

Egy 1-től és -1-től különböző n egész számra jelölje $S(n)$ az n legkisebb 1-nél nagyobb (egész) osztóját. Így például $S(0) = 2$. Legyen ezen kívül $S(1) = S(-1) = 1$.

Tudjuk, hogy egy f egész együtthatós, nem konstans polinomra $S(f(n)) \leq S(n)$ teljesül minden pozitív egész n-re. Mutassuk meg, hogy $f(0) = 0$.

Megjegyzés: Egy nem konstans p polinom egy $p(n) = a_0 + a_1 n + \ldots + a_k n^k$ alakú függvény, ahol k pozitív egész, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ pedig egészek úgy, hogy $a_k \neq 0$.