GQMO

Niveau débutant

*Chaque problème est noté sur 7 points.*

## Problème 1

Trouver tous les quadruplets de nombres réels $(a, b, c, d)$ tels que les égalités

$$X^2 + aX + b = (X - a)(X - c) \text{ et } X^2 + cX + d = (X - b)(X - d)$$

soient satisfaites pour tout nombre réel $X$.

## Problème 2

La banque de Zurich a émis des pièces dont une face est marquée de la lettre $H$ et l'autre face est marquée de la lettre $T$. Alice a aligné $n$ de ces pièces de gauche à droite. Elle réalise alors plusieurs fois de suite l'opération suivante : si la lettre $H$ est visible sur au moins une pièce, Alice choisit un groupe de pièces consécutives (ce groupe doit contenir au moins une pièce) et les retourne toutes; sinon, lorsque la lettre $T$ est visible sur toutes les pièces, Alice s'arrête. Par exemple, si $n = 3$, Alice peut effectuer les opérations suivantes : $THT \to HTH \to HHH \to TTH \to TTT$. Elle pourrait également choisir d'effectuer l'opération $THT \to TTT$.

Pour toute configuration initiale $C$, on note $m(C)$ le nombre minimal d'opérations que doit réaliser Alice. Par exemple, $m(THT) = 1$ et $m(TTT) = 0$. Trouver, pour tout entier $n \geqslant 1$, la valeur maximale que peut valoir $m(C)$ lorsque $C$ parcourt l'ensemble des $2^n$ configurations initiales possibles.

## Problème 3

Soit $A$ et $B$ deux points distincts du plan. Soit $M$ le milieu du segment $[AB]$, et soit $\omega$ un cercle passant par $A$ et $M$. Soit $T$ un point de $\omega$ tel que la droite $(BT)$ soit tangente à $\omega$. Soit $X$ un point (autre que $B$) de la droite $(AB)$ et tel que $TB = TX$. Enfin, soit $Y$ le pied de la hauteur issue de $A$ dans le triangle $ABT$.

Démontrer que les droites $(AT)$ et $(XY)$ sont parallèles.

### Problème 4

Pour tout nombre réel $x$, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à $x$. Trouver toutes les fonctions $f$ définies sur l'ensemble des réels, à valeurs réelles, et qui satisfont l'égalité

$$f(x+y) = (-1)^{\lfloor y \rfloor} f(x) + (-1)^{\lfloor x \rfloor} f(y)$$

pour tous les réels $x$ et $y$.

### Problème 5

Soit $n$ et $k$ deux entiers naturels non nuls tels que $k \leqslant 2^n$. Banana et Corona jouent au jeu suivant. Tout d'abord, Banana choisit, en secret, un entier $x$ tel que $1 \leqslant x \leqslant n$. Par la suite, Corona tente de trouver $x$ en posant des questions telles que décrites ci-dessous. À chaque tour, Corona choisit $k$ sous-ensembles de $\{1, 2, \ldots, n\}$ deux à deux distincts puis, pour chaque sous-ensemble $S$ qu'il a choisi, pose la question :

« L'entier $x$ appartient-il à l'ensemble $S$ ? »

Banana choisit alors une de ces $k$ questions, puis informe Corona de la question qu'elle a choisie et de la réponse à cette question. Corona peut maintenant commencer un nouveau tour, et ainsi de suite.

Trouver l'ensemble des paires d'entiers $(n, k)$ telles que Corona peut s'assurer, quels que soient les choix de Banana, de trouver avec une certitude absolue l'entier $x$ en un nombre fini de tours.

### Problème 6

Pour tout entier $n$ différent de 1 et de $-1$, on note $S(n)$ le plus petit entier supérieur ou égal à 2 qui divise $n$. En particulier, $S(0) = 2$. On pose également $S(1) = S(-1) = 1$.

Soit $f$ un polynôme non constant à coefficients entiers, tel que $S(f(n)) \leqslant S(n)$ pour tout entier $n \geqslant 1$. Démontrer que $f(0) = 0$.

**Remarque :** Un polynôme non constant à coefficients entiers est une fonction de la forme $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$, où $k$ est un entier naturel non nul et $a_0, a_1, \ldots, a_k$ sont des entiers tels que $a_k \neq 0$.