



## سطح مقدماتی

هر مسئله ۷ نمره دارد.

### مسئله ۱

همه چهارتایی  $(a, b, c, d)$  از اعداد حقیقی را بیابید که برای هر  $X$  حقیقی داشته باشیم:

$$X^2 + cX + d = (X - b)(X - d) \text{ و } X^2 + aX + b = (X - a)(X - c)$$

### مسئله ۲

بانک شکرستان سکه‌هایی ضرب می‌کند که روی یک طرف آن  $H$  و در طرف دیگر آن  $T$  حک شده است. بهلول  $n$  سکه شکرستانی را در یک ردیف قرار داده است. او هر بار این عملیات را انجام می‌دهد: اگر سکه‌ای به طرف  $H$  بود، بهلول یک بلوک از  $k$  سکه متوالی ( $1 \leq k \leq n$ ) را انتخاب می‌کند و همه سکه‌های بلوک را برمی‌گرداند (یعنی  $H$  به  $T$  تبدیل می‌شود و  $T$  به  $H$ ). در غیر این صورت یعنی همه سکه‌ها به طرف  $T$  هستند و او متوقف می‌شود. برای  $n = 3$  و آرایش اولیه سکه‌ها به صورت  $THT$ ، بهلول می‌تواند به این صورت عمل کند:

$$THT \rightarrow HTH \rightarrow HHH \rightarrow TTH \rightarrow TTT$$

بهلول می‌توانست به صورت  $THT \rightarrow TTT$  نیز عمل کند.

برای هر آرایش اولیه  $C$ ، فرض کنید  $m(C)$  کمترین تعداد عملیاتی باشد که بهلول می‌تواند طی کند تا به وضعیت نهایی برسد. برای مثال  $m(THT) = 1$  و  $m(TTT) = 0$ . برای هر  $n \geq 1$ ، بزرگترین مقدار  $m(C)$  را برای همه  $2^n$  آرایش ممکن اولیه  $C$  بدست آورید.

### مسئله ۳

فرض کنید  $A$  و  $B$  دو نقطه متمایز در صفحه باشند. فرض کنید  $M$  وسط پاره‌خط  $AB$  و  $\omega$  دایره‌ای گذرنده از  $A$  و  $M$  باشد. همچنین نقطه  $T$  روی  $\omega$  به گونه‌ای قرار دارد که  $BT$  به  $\omega$  مماس است. نقطه  $X \neq B$  نیز نقطه‌ای روی خط  $AB$  است به طوری که  $TB = TX$  و  $Y$  تصویر  $A$  روی  $BT$  است. نشان دهید  $AT$  با  $XY$  موازی است.

#### مسئله ۴

همه توابع  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  را بیابید که برای هر  $x, y \in \mathbb{R}$  داشته باشیم  $([x])$  نماد جزء صحیح عدد  $x$  است):

$$f(x+y) = (-1)^{[y]} f(x) + (-1)^{[x]} f(y)$$

#### مسئله ۵

فرض کنید  $n, k$  اعدادی صحیح و مثبت باشند که  $k \leq 2^n$ . احمد و بهرام می خواهند بازی زیر را با هم انجام دهند. ابتدا احمد عدد صحیح  $x$  را که  $1 \leq x \leq n$  انتخاب می کند. سپس بهرام  $x$  را با پرسش چند سوال از احمد که مشروط به شرایط زیر هستند، حدس میزند. در هر نوبت، بهرام  $k$  زیر مجموعه متمایز از  $\{1, 2, \dots, n\}$  انتخاب می کند و برای هر زیرمجموعه انتخابی مانند  $S$ ، این سوال را روی کارتی یادداشت می کند:

«آیا  $x$  عضو  $S$  است؟»

احمد یکی از این  $k$  کارت را بر داشته و پاسخ سوال را روی آن می نویسد و کارت را به بهرام می دهد. این فرآیند تا زمانی که بهرام بتواند  $x$  را به درستی حدس بزند ادامه می یابد.

همه زوج های مرتب  $(n, k)$  را بیابید به قسمی که بهرام بتواند با تعدادی متناهی پرسش،  $x$  را با قاطعیت حدس بزند.

#### مسئله ۶

برای هر  $1, -1 \neq n$  صحیح، فرض کنید  $S(n)$  کوچکترین عدد صحیح بزرگتر از ۱ باشد که  $n$  بر آن بخش پذیر است. همچنین تعریف کنید  $1 = S(-1) = S(1) = 2, S(0) = 1$ .

فرض کنید  $f$  چند جمله ای غیر ثابت با ضرایب صحیح باشد به طوری که برای هر  $n$  صحیح مثبت داشته باشیم  $S(f(n)) \leq S(n)$ . ثابت کنید  $f(0) = 0$ .

توجه کنید که چندجمله ای غیر ثابت با ضرایب صحیح، تابعی به فرم

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$$

است که  $k$  عددی صحیح مثبت و  $a_0, a_1, \dots, a_k$  اعدادی صحیح باشند که  $a_k \neq 0$ .