Nivel Principiante

Versión en Español.
Cada problema vale 7 puntos.

Problema 1

Encuentre todos los conjuntos de 4 números reales (a, b, c, d) tales que las igualdades

$$X^2 + aX + b = (X-a)(X-c) \text{ y } X^2 + cX + d = (X-b)(X-d)$$

son válidas para todos los números reales X.

Problema 2

El Banco de Zürich emite monedas con una H en un lado y una T en el otro. Alicia tiene n de estas monedas dispuestas en una línea de izquierda a derecha. En repetidas ocasiones ella realiza la siguiente operación: si alguna moneda muestra su lado H, Alicia elige un grupo de al menos 1 y máximo n monedas consecutivas y las voltea; de lo contrario, todas las monedas muestran su lado T y Alicia se detiene. Por ejemplo, si $n = 3$, Alicia puede realizar las siguientes operaciones: $THT \to HTH \to HHH \to TTH \to TTT$. También podría optar por realizar la operación $THT \to TTT$.

Para cada configuración inicial C, sea $m(C)$ el mínimo número de operaciones que Alicia debe realizar. Por ejemplo, $m(THT) = 1$ y $m(TTT) = 0$. Para todo $n \geq 1$, determine el mayor valor de $m(C)$ de todas las 2^n posibles configuraciones iniciales C.

Problema 3

Sean A y B dos puntos distintos en el plano. Sea M el punto medio del segmento AB, y sea w un círculo que pasa por A y M. Sea T un punto sobre w tal que la línea BT es tangente a w. Sea X un punto (distinto de B) en la línea AB tal que $TB = TX$ y sea Y el pie de la perpendicular desde A a la línea BT. Pruebe que las líneas AT y XY son paralelas.

Problema 4

Para todos los número reales x, definimos $\lfloor x \rfloor$ como el entero de mayor valor que no excede de x. Encuentre todas las funciones f que están definidas en el conjunto de todos los números reales, toman valores reales y satisfacen la igualdad

$$f(x+y) = (-1)^{\lfloor y \rfloor} f(x) + (-1)^{\lfloor x \rfloor} f(y)$$

para todos los reales x y y.

Problema 5

Sean n, k enteros positivos tales que $k \leq 2^n$. Ana y Beto están jugando la siguiente variante de un juego de adivinanzas. Primero, Ana escoge secretamente un número x, tal que $1 \leq x \leq n$. Beto tratará de determinar x haciendo algunas preguntas que se describen a continuación. En cada turno, Beto escoge k distintos subconjuntos de $\{1, 2, \ldots, n\}$, y luego, para cada conjunto S, realiza la siguiente pregunta:

"¿Está x en el conjunto S?"

Luego, Ana tiene que escoger una pregunta y decir a Beto tanto la pregunta como su respectiva respuesta. Encuentre, con su respectiva demostración, todos los pares (n, k) tales que Beto puede determinar x en una cantidad finita de turnos con absoluta certeza, sin importar como juegue Ana.

Problema 6

Para cada entero n distinto de 1 ó -1, se define $S(n)$ como el entero de menor valor mayor que 1 que divide a n. En particular, $S(0) = 2$. También definimos $S(1) = S(-1) = 1$.

Sea f un polinomio no constante con coeficientes enteros tales que $S(f(n)) \leq S(n)$ para todos los enteros positivos n. Demuestre que $f(0) = 0$.

Nota: Un polinomio no constante con coeficientes enteros es una función de la forma $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$, donde k es un entero positivo y $a_0, a_1, \ldots, a_k$ son enteros tales que $a_k \neq 0$.