Lihtsam tase

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Ülesanne 1

Leia kõik reaalarvude nelikud (a, b, c, d), mille korral võrdused

$$X^2 + aX + b = (X - a)(X - c) \text{ ning } X^2 + cX + d = (X - b)(X - d)$$

kehtivad kõikide reaalarvude X jaoks.

Ülesanne 2

Zürichi pank annab välja münte, mille ühel küljel on H ja teisel T. Annal on n sellist münti, mis paiknevad ühel sirgel. Ta teostab korduvalt järgmist operatsiooni: kui mingil mündil on külg H üleval, siis valib Anna hulga järjestikuseid münte (selles hulgas peab olema vähemalt üks münt) ja pöörab need kõik ümber; vastasel juhul on kõikidel müntidel külg T üleval ning Anna lõpetab. Näiteks juhul $n = 3$ võib Anna teostada järgmisi operatsioone: $THT \to HTH \to HHH \to TTH \to TTT$. Samuti võib ta teostada operatsiooni $THT \to TTT$.

Iga algse konfiguratsiooni C jaoks olgu $m(C)$ minimaalne operatsioonide arv, mida Anna peab teostama, näiteks $m(THT) = 1$ ning $m(TTT) = 0$. Leia iga täisarvu $n \geqslant 1$ jaoks suurim $m(C)$ väärtus üle kõikide 2^n võimalike algsete konfiguratsioonide C.

Ülesanne 3

Olgu A ja B kaks erinevat punkti tasandil. Olgu M lõigu AB keskpunkt ning olgu ω mingi ringjoon läbi punktide A ja M. Olgu T selline punkt ringjoonel ω, et sirge BT on ω puutuja. Olgu X (punktist B erinev) punkt sirgel AB, nii et $|TB| = |TX|$, ja olgu Y punktist A sirgele BT tõmmatud kõrguse aluspunkt.

Tõesta, et sirged AT ja XY on paralleelsed.

Ülesanne 4

Iga reaalarvu x jaoks olgu $\lfloor x \rfloor$ suurim täisarv, mis ei ole arvust x suurem. Leia kõik funktsioonid f reaalarvude hulgast reaalarvude hulka, mis rahuldavad võrdust

$$f(x+y) = (-1)^{\lfloor y \rfloor} f(x) + (-1)^{\lfloor x \rfloor} f(y)$$

kõikide reaalarvude x ja y jaoks.

Ülesanne 5

Olgu n ja k sellised positiivsed täisarvud, et $k \leqslant 2^n$. Banana ja Corona mängivad järgnevat arvamismängu. Esmalt valib Banana salaja täisarvu x, $1 \leqslant x \leqslant n$. Corona üritab x väärtust kindlaks määrata, küsides selleks järgneval viisil küsimusi. Igal käigul valib Corona k paarikaupa erinevat hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ alamhulka ning iga valitud hulga S jaoks küsib küsimuse

"Kas x on hulgas S?"

Banana valib nendest k küsimusest ühe ning ütleb Coronale valitud küsimuse ning selle vastuse, misjärel Corona alustab uue käiguga.

Leia kõik täisarvupaarid (n, k), mille korral saab Corona olenemata Banana valikutest x väärtuse lõpliku arvu käikudega alati kindlaks määrata.

Ülesanne 6

Iga arvust 1 ning -1 erineva täisarvu n korral olgu $S(n)$ vähim ühest suurem täisarv, mis jagab arvu n, sealjuures $S(0) = 2$. Samuti olgu $S(1) = S(-1) = 1$.

Olgu f selline mittekonstantne täisarvuliste kordajatega polünoom, et $S(f(n)) \leqslant S(n)$ iga positiivse täisarvu n korral. Tõesta, et $f(0) = 0$.

Märkus: Mittekonstantne täisarvuliste kordajatega polünoom on funktsioon kujul $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_kx^k$, kus k on positiivne täisarv, $a_0, a_1, \ldots, a_k$ on täisarvud ning $a_k \neq 0$.