GQMO

ANFÄNGERLEVEL

Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Aufgabe 1

Man bestimme alle Quadrupel von reellen Zahlen (a, b, c, d), sodass die Gleichungen

$$X^2 + aX + b = (X - a)(X - c) \text{ und } X^2 + cX + d = (X - b)(X - d)$$

für alle reellen Zahlen X gelten.

Aufgabe 2

Die Bank von Zürich stellt Münzen mit einem H auf einer Seite und einem T auf der anderen Seite her. Alice hat n dieser Münzen in einer Linie von links nach rechts aufgelegt. Sie führt die folgende Operation wiederholt durch: falls eine Münze H zeigt, wählt Alice eine Gruppe von aufeinanderfolgenden Münzen aus (diese Gruppe muss mindestens eine Münze beinhalten) und dreht sie alle um; andernfalls zeigen alle Münzen T und Alice hört auf. Zum Beispiel für $n = 3$ kann Alice folgende Operationen durchführen: $THT \to HTH \to HHH \to TTH \to TTT$. Sie könnte auch die Operation $THT \to TTT$ wählen.

Für jede ursprüngliche Konfiguration C der Münzen sei $m(C)$ die kleinste Anzahl an Operationen, die Alice durchführen muss. Zum Beispiel $m(THT) = 1$ und $m(TTT) = 0$. Man bestimme für jede ganze Zahl $n \geq 1$ den größten Wert von $m(C)$ über alle 2^n möglichen ursprünglichen Konfigurationen C.

Aufgabe 3

Es seien A und B zwei verschiedene Punkte in der Ebene. Es seien M der Mittelpunkt der Strecke AB und ω ein Kreis, der durch A und M geht. Es sei T ein Punkt auf ω, sodass die Gerade BT eine Tangente an ω ist. Weiters seien X ein Punkt (verschieden von B) auf der Gerade AB, sodass $TB = TX$, und Y der Fußpunkt der Höhe durch A auf die Gerade BT.

Man zeige, dass die Geraden AT und XY parallel sind.

Aufgabe 4

Für alle reellen Zahlen x bezeichnen wir mit $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die nicht größer als x ist. Man bestimme alle Funktionen f, welche auf der Menge der reellen Zahlen definiert sind und reelle Werte annehmen, sodass

$$f(x+y) = (-1)^{\lfloor y \rfloor} f(x) + (-1)^{\lfloor x \rfloor} f(y)$$

für alle reellen Zahlen x und y gilt.

Aufgabe 5

Es seien n und k positive ganze Zahlen, sodass $k \leq 2^n$. Banana und Corona spielen die folgende Variante eines Ratespiels. Zuerst wählt Banana im Geheimen eine ganze Zahl x mit $1 \leq x \leq n$ aus. Corona wird versuchen, x zu bestimmen, indem sie wie folgt einige Fragen stellt. In jedem Zug wählt Corona k verschiedene Teilmengen von $\{1, 2, \ldots, n\}$ aus und stellt für jede ausgewählte Menge S die Frage

„Ist x ein Element der Menge S?"

Banana wählt eine dieser k Fragen aus und teilt Corona sowohl die ausgewählte Frage als auch deren Antwort mit. Daraufhin kann Corona einen weiteren Zug beginnen.

Man bestimme alle Paare (n, k), sodass Corona x mit absoluter Sicherheit in endlich vielen Zügen bestimmen kann, unabhängig davon, wie Banana handelt.

Aufgabe 6

Für jede ganze Zahl n ungleich 1 bzw. -1 sei $S(n)$ die kleinste ganze Zahl größer als 1, welche n teilt. Insbesondere ist $S(0) = 2$. Wir definieren weiters $S(1) = S(-1) = 1$.

Es sei f ein nicht konstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, sodass $S(f(n)) \leq S(n)$ für alle positiven ganzen Zahlen n gilt. Man zeige, dass $f(0) = 0$.

Anmerkung: Ein nicht konstantes Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten ist eine Funktion der Form $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$, wobei k eine positive ganze Zahl ist und $a_0, a_1, \ldots, a_k$ ganze Zahlen mit $a_k \neq 0$ sind.