



## المستوى السهل

لكل مسألة 7 نقاط.

### المسألة 1

حدد جميع الرباعيات (a, b, c, d) من أعداد حقيقية التي تحقق المعادلتين التاليتين:

$$X^2 + cX + d = (X - b)(X - d) \text{ و } X^2 + aX + b = (X - a)(X - c)$$

مهما يكن العدد الحقيقي X.

### المسألة 2

يصدر بنك زورخ قطعاً نقدية بحرف H على احد وجهيها و T على الوجه الأخر.

لأليس n قطعة نقدية منها، رتبها في خط من اليسار الى اليمين. تقوم أليس بالعمليات التالية عليها بشكل متكرر:

إذا كانت هناك قطعة نقدية على الأقل تظهر الوجه الذي يحمل H، تختار أليس عدداً من القطع النقدية المرتبة تقالياً (عدداً طبيعياً من {1, 2, ..., n}) ثم تقوم بقلبها (هذه القطع) لتظهر أوجهها الأخرى، أما إذا كانت أو أصبحت كل القطع تظهر الوجه الذي يحمل T فإن أليس تتوقف.

كمثال، إذا كان n = 3، قد تقوم أليس بالعمليات التالية: THT → HTH → HHH → TTH → TTT.

كما قد تقوم بالعملية التالية عوضاً عن ذلك: THT → TTT.

لكل ترتيب أولي للقطع النقدية C، لتكن m(C) أقل عدد ممكن من العمليات التي على أليس القيام بها. كمثال، m(THT) = 1 و m(TTT) = 0. لكل عدد طبيعي

$n \geq 1$  حدد أكبر قيمة ممكنة ل m(C) من بين كل ال  $2^n$  ترتيب أولي ممكن C.

### المسألة 3

لتكن A و B نقطتين في المستوى، نعتبر M منتصف القطعة AB، و (ω) دائرة مارة من A و M. لتكن T نقطة من (ω) بحيث BT مماس للدائرة (ω). لتكن النقطة

X (غير النقطة B) تنتهي إلى AB بحيث أن TB = TX، و Y المسقط العمودي ل A على BT.

بين أن AT يوازي XY.

مدة الإنجاز: 5 ساعات

#### المسألة 4

لكل عدد حقيقي  $x$ ، نقصد ب  $[x]$  أكبر عدد صحيح (ينتمي الى  $\mathbb{Z}$ ) أصغر من أو يساوي  $x$ . أوجد جميع الدوال (التوايع)  $f$  المعرفة في مجال/مجموعة الأعداد الحقيقية، التي تأخذ قيم حقيقية، وتحقق:

$$f(x+y) = (-1)^{[x]}f(x) + (-1)^{[y]}f(y)$$

مهما يكن  $x$  و  $y$  عددين حقيقيين.

#### المسألة 5

ليكن  $n$  و  $k$  عددين صحيحين موجبين قطعاً بحيث أن  $k \leq 2^n$ . يلعب 'كورونا' و 'بانانا' النسخة التالية من لعبة التخمين. أولاً، يقوم بانانا باختيار عدد صحيح بحيث  $1 \leq x \leq n$  خفية عن كورونا. هذا الأخير سيحاول تحديد  $x$  من خلال طرح بعض الأسئلة كما يلي:  
في كل دور، يختار كورونا  $k$  مجموعة جزئية مختلفة مثنى مثنى من  $\{1, 2, \dots, n\}$ ، ولكل مجموعة جزئية  $S$  اختارها، يطرح كورونا السؤال التالي:

"هل  $x$  ضمن  $S$ ؟"

تالياً، يختار بانانا سؤالاً واحداً من هذه الأسئلة (التي عددها  $k$ )، ويجب عنه مع ذكر السؤال الذي اختاره. هنا يستطيع كورونا بدء جولة أخرى من جديد. حدد جميع الأزواج  $(n, k)$  التي يستطيع عندها كورونا تحديد  $x$  بيقين مطلق خلال عدد منته من الجولات، بغض النظر عن اختيارات بانانا.

#### المسألة 6

لكل عدد صحيح  $n$  (ينتمي الى  $\mathbb{Z}$ ) مختلف عن 1 و -1، نعرف  $S(n)$  كأصغر عدد صحيح أكبر قطعاً من 1 يقسم  $n$ . بالخصوص،  $S(0) = 2$ . كما نعرف  $S(1) = S(-1) = 1$ .

لتكن  $f$  حدودية (كثيرة حدود) غير ثابتة بمعاملات صحيحة حيث أن  $S(f(n)) \leq S(n)$  لكل  $n$  عدد صحيح أكبر من أو يساوي صفر. بين أن  $f(0) = 0$ .

ملحوظة: حدودية غير ثابتة بمعاملات صحيحة هي دالة على شكل  $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_kx^k$  حيث  $k$  عدد صحيح موجب قطعاً.

و  $a_0, a_1, \dots, a_k$  أعداد صحيحة بحيث أن  $a_k$  لا تساوي 0.