ระดับยาก

วันที่ 1

*โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 7 คะแนน*

*โจทย์ต่อไปนี้จะต้องถูกเก็บเป็นความลับจนถึงวันจันทร์ที่ 18 พฤษภาคม เวลา 19.00 น. (ตามเวลาประเทศไทย)*

**โจทย์ข้อที่ 1**

ให้ $ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมที่มี $I$ เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมแนบใน
วงกลมแนบในของรูปสามเหลี่ยม $ABC$ สัมผัสด้าน $AC$ และ $AB$ ที่จุด $E$ และ $F$ ตามลำดับ
ให้ $\ell_B$ และ $\ell_C$ เป็นเส้นสัมผัสวงกลมล้อมรอบรูปสามเหลี่ยม $BIC$ ที่จุด $B$ และ $C$ ตามลำดับ

จงพิสูจน์ว่ามีวงกลมที่สัมผัสกับ $EF$, $\ell_B$ และ $\ell_C$ ซึ่งมีจุดศูนย์กลางอยู่บนเส้นตรง $BC$

**โจทย์ข้อที่ 2**

พงศ์พลมีลูกอมจำนวนไม่จำกัด ซึ่งมีทั้งหมด $n$ รสชาติ เขาแจกจ่ายลูกอมบางส่วนให้กับเด็ก $n$ คนอย่างไรก็ได้ (เด็กแต่ละคนจะได้ลูกอมกี่รสชาติหรือไม่ได้เลยก็ได้) เรียกการแจกแจงลูกอมว่า $k$-*น่ารัก* ถ้าทุกกลุ่มของเด็ก $k$ คน มีลูกอมอย่างน้อย $k$ รสชาติเมื่อนำมารวมกัน จงหาสับเซต $S$ ของ $\{1, 2, \ldots, n\}$ ทั้งหมดที่สอดคล้องกับข้อความต่อไปนี้ ถ้าการแจกแจงลูกอมเป็น $s$-น่ารักสำหรับทุก $s \in S$ แล้วมันจะเป็น $s$-น่ารักสำหรับทุก $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$

**โจทย์ข้อที่ 3**

เรียกเซตของจำนวนเต็มว่า*พิเศษ*ก็ต่อเมื่อมันมีสมาชิก 4 จำนวน และสามารถแบ่งออกเป็นสับเซต 2 สับเซต $\{a, b\}$ และ $\{c, d\}$ ที่ไม่มีสมาชิกร่วมกัน และ $ab - cd = 1$
สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $n$ จงพิสูจน์ว่าเซต $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ ไม่สามารถแบ่งออกเป็นเซตพิเศษ $n$ เซต ที่สองเซตใดๆ ไม่มีสมาชิกร่วมกันได้

**โจทย์ข้อที่ 4**

จงพิสูจน์ว่า สำหรับทุกจำนวนเต็ม $n$ ที่มีค่ามากพอ จะมีจำนวน $n$ จำนวน $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขสามเงื่อนไขดังต่อไปนี้

- แต่ละจำนวน $a_i$ มีค่าเท่ากับ $-1$, $0$ หรือ $1$
- อย่างน้อย $2n/5$ จำนวนในบรรดา $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ไม่เท่ากับ $0$
- ผลบวก $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n$ มีค่าเท่ากับ $0$

*หมายเหตุ : ถ้าผู้เข้าแข่งขันสามารถพิสูจน์ข้อความดังกล่าวข้างต้นสำหรับ $cn$ แทนที่จะเป็น $2n/5$ จะได้รับการพิจารณาให้คะแนน โดยขึ้นกับค่า $c$ ที่พิสูจน์ได้*

ระดับยาก

วันที่ 2

*โจทย์แต่ละข้อมีคะแนนเต็ม 7 คะแนน*

*โจทย์ต่อไปนี้จะต้องถูกเก็บเป็นความลับจนถึงวันจันทร์ที่ 18 พฤษภาคม เวลา 19.00 น. (ตามเวลาประเทศไทย)*

**โจทย์ข้อที่ 5**

ให้ $\mathbb{Q}$ แทนเซตของจำนวนตรรกยะ จงหาฟังก์ชัน $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ ทั้งหมดที่ทำให้สำหรับทุก $x, y \in \mathbb{Q}$

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x)$$

**โจทย์ข้อที่ 6**

จงพิจารณาว่ามีสามสิ่งอันดับ $(a, b, c)$ ของจำนวนเต็มบวกอยู่เป็นอนันต์หรือไม่ ซึ่งทำให้ตัวประกอบเฉพาะทุกตัวของ $a! + b! + c!$ มีค่าน้อยกว่า 2020

**โจทย์ข้อที่ 7**

จำนวนเต็มแต่ละจำนวนในเซต $\{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ ถูกระบายสีให้สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้ สำหรับทุกจำนวนเต็มบวก $a$ และ $b$ ที่ $a+b \leq 2020$ อย่างน้อยสองจำนวนใน $a$, $b$ และ $a+b$ ถูกระบายด้วยสีเดียวกัน จงหาจำนวนสีที่มากที่สุดที่สามารถใช้ได้

**โจทย์ข้อที่ 8**

ให้ $\triangle ABC$ เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมแหลมด้านไม่เท่า ที่มี $D, E, F$ เป็นจุดปลายส่วนสูงจาก $A, B, C$ ไปยังด้าน $BC, CA, AB$ ตามลำดับ
ให้ $W$ เป็นจุดภายใน $\triangle ABC$ ซึ่งภาพสะท้อนของมันข้าม $BC, CA, AB$ คือ $W_a, W_b, W_c$ ตามลำดับ
ให้ $N$ และ $I$ เป็นจุดศูนย์กลางวงกลมล้อมรอบ และจุดศูนย์กลางวงกลมแนบในของ $\triangle W_aW_bW_c$ ตามลำดับ
สมมติว่าจุด $N$ เป็นจุดเดียวกันกับจุดศูนย์กลางวงกลมเก้าจุดของ $\triangle DEF$ แล้วจงพิสูจน์ว่า $WI$ ขนานกับเส้นออยเลอร์ของ $\triangle ABC$

*หมายเหตุ: ถ้า $\triangle XYZ$ เป็นสามเหลี่ยมที่มี $O$ เป็นจุดศูนย์กลางวงล้อม และ $H$ เป็นจุดออร์โทเซ็นเตอร์ แล้วจะเรียกเส้นตรง $OH$ ว่าเป็นเส้นออยเลอร์ของ $\triangle XYZ$ และจะเรียกจุดกึ่งกลางของ $OH$ ว่าเป็นจุดศูนย์กลางวงกลมเก้าจุดของ $\triangle XYZ$*