Продвинутый уровень

2 тур

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Эти задачи должны оставаться в секрете до понедельника, 18 мая 2020, 12:00 (GMT).

Задача 5

Пусть $\mathbb{Q}$ обозначает множество рациональных чисел. Найдите все функции $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ такие, что для всех $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x).$$

Задача 6

Определите, существует ли бесконечно много троек (a, b, c) натуральных чисел таких, что все простые делители выражения $a! + b! + c!$ меньше 2020.

Задача 7

Каждое натуральное число из множества $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ покрашено таким образом, что для всех натуральных чисел a и b таких, что $a + b \leq 2020$, числа a, b и $a + b$ не покрашены в три разных цвета. Определите максимальное возможное количество использованных цветов.

Задача 8

Пусть ABC – остроугольный разносторонний треугольник, а основания высот из A, B, C на BC, CA, AB обозначим D, E, F, соответственно. Пусть W – точка внутри ABC, точки симметричные которой относительно BC, CA, AB назовём W_a, W_b, W_c, соответственно. Пусть N и I – центры описанной и вписанной окружностей треугольника $W_aW_bW_c$, соответственно. Докажите, что если N совпадает с центром девяти точек DEF, то WI параллельно прямой Эйлера треугольника ABC.

Примечание: Если XYZ – треугольник с центром описанной окружности O и ортоцентром H, тогда прямая OH называется прямой Эйлера треугольника XYZ, а середина отрезка OH называется центром девяти точек треугольника XYZ.

Продвинутый уровень

1 тур

Каждая задача оценивается в 7 баллов.

Эти задачи должны оставаться в секрете до понедельника, 18 мая 2020, 12:00 (GMT).

Задача 1

Пусть ABC – треугольник с центром вписанной окружности I. Вписанная окружность треугольника ABC касается сторон AC и AB в точках E и F, соответственно. Пусть ℓ_B и ℓ_C – касательные к описанной окружности треугольника BIC в точках B и C, соответственно. Докажите, что существует окружность, касающаяся EF, ℓ_B и ℓ_C с центром на прямой BC.

Задача 2

У Дяди Стёпы есть бесконечный запас конфет n разных вкусов. Он произвольно распределяет некоторые из конфет между n детьми (ребёнок может получить конфеты любого подмножества всех вкусов, включая пустое множество). Назовём распределение конфет k-*приятным*, если каждая группа из k детей вместе имеет конфеты хотя бы k вкусов. Найдите все подмножества S множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что если распределение s-приятное для всех $s \in S$, то оно s-приятное для всех $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Задача 3

Назовём множество целых чисел *особенным*, если оно состоит из 4 элементов и может быть разбито на 2 непересекающихся подмножества $\{a, b\}$ и $\{c, d\}$ так, что $ab - cd = 1$. Для каждого натурального n докажите, что множество $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ невозможно разбить на n попарно непересекающихся особенных множеств.

Задача 4

Докажите, что для всех достаточно больших натуральных чисел n существуют n целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, удовлетворяющих следующим трём уловиям:

- Каждое из a_i равно -1, 0 или 1.
- Хотя бы $2n/5$ чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ не равны нулю.
- Сумма $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n$ равна 0.

Замечание: за доказательство утверждения задачи, в котором $2/5$ заменено на константу c, будут начисляться баллы в зависимости от константы c.