LIVELLO AVANZATO

GIORNO 1

Ogni problema vale 7 punti.

Questi problemi sono confidenziali fino a lunedì a mezzogiorno (GMT) - ore 14 italiane.

Problema 1

Sia ABC un triangolo con incentro I. La circonferenza inscritta ad ABC è tangente ad AC e AB rispettivamente in E ed F. Siano ℓ_B e ℓ_C le tangenti, rispettivamente in B e C, alla circonferenza circoscritta a BIC. Dimostra che esiste una circonferenza tangente a EF, ℓ_B and ℓ_C il cui centro giace su BC.

Problema 2

Geoff ha un numero infinito di caramelle, delle quali esistono n gusti. Le distribuisce arbitrariamente a n bambini (ogni bambino può ottenere un qualsiasi sottoinsieme dei gusti, potenzialemente vuoto). Una distribuzione di caramelle è *k-buona* se ogni gruppo di k bambini, insieme, ha caramelle di almeno k gusti. Determinare tutti i sottoinsiemi S di $\{1, 2, \ldots, n\}$ tali che se una distribuzione di caramelle è s-buona per tutti gli $s \in S$, allora è s-buona per tutti gli $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Problema 3

Un insieme di interi è detto *speciale* se ha 4 elementi e può essere partizionato in due sottoinsiemi disgiunti $\{a, b\}$ $\{c, d\}$ in modo che $ab - cd = 1$. Per ogni intero positivo n, dimostra che l'insieme $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ non può essere partizionato in n insiemi speciali a due disgiunti.

Problema 4

Dimostra che, per ogni n sufficientemente grande, esistono n numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tali che:

- Ogni numero a_i è uguale a -1, 0 o 1.
- Almeno $2n/5$ dei numeri $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sono diversi da zero.
- $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n = 0$.

Nota: Risultati con $2/5$ sostituito da una costante c daranno diritto a un punteggio in funzione del valore di c.

LIVELLO AVANZATO

GIORNO 2

Ogni problema vale 7 punti.

Questi problemi sono confidenziali fino a lunedì a mezzogiorno (GMT) - ore 14 italiane.

Problema 1

Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali. Determinare tutte le funzioni $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tali che, per ogni $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x)$$

Problema 2

Determinare se esistono infinite triple (a, b, c) di interi positivi tali che tutti i fattori primi di $a!+b!+c!$ sono minori di 2020.

Problema 3

Ogni intero in $\{1, 2, 3, \dots, 2020\}$ è colorato in modo che, per tutte le coppie (a, b) di interi positivi tali che $a + b \leq 2020$, i numeri a, b e $a + b$ non siano colorati con tre colori diversi. Determinare il massimo numero di colori che possono essere utilizzati.

Problema 4

Sia ABC un triangolo scaleno acutangolo. Siano D, E ed F, rispettivamente, i piedi delle altezze uscenti da A, B e C. Siano N il centro dei nove punti di DEF e W un punto interno ad ABC. Siano W_a, W_b e W_c i simmetrici di W rispetto a BC, CA e AB. Se N e I sono, rispettivamente, circocentro e incentro di $W_aW_bW_c$, dimostrare che WI è parallela alla retta di Eulero di ABC.

Nota: Se XYZ è un triangolo di circocentro O e ortocentro H, la retta OH è detta retta di Eulero di XYZ e il punto medio di OH è detto centro dei nove punti di XYZ.