Haladó szint

Első nap

Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont szerezhető.

A feladatok 2020. május 18-án 14:00 CEST-ig (12:00 GMT) titkosak.

1. feladat

Az ABC háromszög beírt körének középpontját jelölje I. A beírt kör a háromszög AC és AB oldalait rendre az E és F pontokban érinti. Jelölje ℓ_B és ℓ_C a BIC háromszög körülírt köréhez B és C pontokban húzott érintőket. Mutassuk meg, hogy létezik kör, amely érinti az EF, ℓ_B és ℓ_C egyeneseket, valamint a középpontja a BC egyenesre esik.

2. feladat

Marvinnak végtelen sok cukorkája van, n ízben. Találomra szétoszt n gyerek között néhány cukorkát (egy gyerek az ízek tetszőleges részhalmazához hozzájuthat így, akár az üres halmazhoz is). Hívjunk egy szétosztást k-*jó*nak, ha bármely k gyereknek együtt legalább k-féle ízű cukorkája van. Melyek azon S részhalmazai az $\{1, 2, \ldots, n\}$ halmaznak, amelyekre igaz, hogy ha egy szétosztás s-jó minden $s \in S$ esetén, akkor s-jó minden $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén?

3. feladat

Az egész számok egy részhalmazát *különleges*nek hívjuk, ha 4 elemű és felbontható két diszjunkt $\{a, b\}$ és $\{c, d\}$ halmazra, amelyekre $ab - cd = 1$. Bizonyítsuk, hogy az $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ halmaz semelyik n pozitív egészre sem bontható fel n páronként diszjunkt különleges halmazra.

4. feladat

Bizonyítsuk be, hogy minden elég nagy pozitív egész n-re létezik $a_1, a_2, \ldots, a_n$ szám n-es, amelyre a következők teljesülnek:

- Minden a_i szám a $\{-1, 0, 1\}$ halmazból való.
- Az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok között legalább $2n/5$ nemnulla van.
- $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n = 0$.

Megjegyzés: $2/5$ *helyett más* c *konstansra való bizonyítás* c*-től függően részpontokat ér.*

Haladó szint

Második nap

Minden feladat helyes megoldásáért 7 pont szerezhető.

A feladatok 2020. május 18-án 14:00 CEST-ig (12:00 GMT) titkosak.

5. feladat

Jelölje $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát. Határozzuk meg azon $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ függvényeket, amelyekre minden $x, y \in \mathbb{Q}$ esetén

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x)$$

teljesül.

6. feladat

Létezik-e végtelen sok pozitív egészekből álló (a, b, c) számhármas, amelyre $a! + b! + c!$ minden prímosztója kisebb, mint 2020?

7. feladat

Az $1, 2, 3, \ldots, 2020$ egészek mindegyikét kiszíneztük úgy, hogy minden a, b számpárra, amelyre $a + b \leq 2020$ teljesül, az a, b és $a + b$ számok nem mind különböző színűek. Legfeljebb hány színt használhattunk fel a számok kiszínezésekor?

8. feladat

Legyenek az ABC hegyesszögű nem egyenlőszárú háromszög magasságvonalainak talppontjai a BC, CA, AB oldalakon rendre D, E és F. W legyen egy pont ABC belsejében, ennek a BC, CA, AB oldalakra való tükörképét jelölje rendre W_a, W_b és W_c. Jelölje N és I a $W_aW_bW_c$ háromszög körülírt, valamint beírt körének középpontját. Mutassuk meg, hogy amennyiben N egybeesik a DEF háromszög Feuerbach-körének középpontjával, akkor WI párhuzamos az ABC háromszög Euler-egyenesével.

Megjegyzés: Ha az XYZ háromszög körülírt körének középpontja O, magasságpontja pedig H, akkor az OH egyenest nevezzük a háromszög Euler-egyenesének, az OH szakasz felezőpontja pedig a Feuerbach-kör középpontja.