Niveau avancé

Première journée

Chaque problème est noté sur 7 points.

Ces problèmes doivent rester confidentiels jusqu'au lundi 18 mai 2020 à midi (UTC).

Problème 1

Soit ω le cercle inscrit dans un triangle ABC. On note I le centre de ω, puis E et F les points de tangence respectifs des droites (AC) et (AB) avec ω. Enfin, soit ℓ_B et ℓ_C les tangentes respectives au cercle circonscrit à BIC en les points B et C.

Démontrer qu'il existe un cercle tangent aux trois droites (EF), ℓ_B et ℓ_C, et dont le centre se trouve sur la droite (BC).

Problème 2

Les organisateurs de la GQMO ont proposé n problèmes de mathématiques aux n candidats de l'olympiade. Chaque candidat a réussi entre 0 et n problèmes. On dit que l'olympiade est un k-*succès* si chaque groupe de k candidats a, dans son ensemble, réussi k problèmes ou plus (c'est-à-dire que chacun de ces k problèmes ou plus a été réussi par au moins un des k candidats).

Trouver tous les ensembles E inclus dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ et tels que, si l'olympiade est un k-succès pour tout $k \in E$, alors cette olympiade est nécessairement un k-succès pour tout $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Problème 3

Un ensemble est dit *spécial* lorsqu'il contient quatre entiers et qu'il peut être partitionné en deux ensembles disjoints $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ tels que $ab - cd = 1$. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ ne peut pas être partitionné en n ensembles spéciaux deux à deux disjoints.

Problème 4

Démontrer que, pour tout entier n suffisamment grand, il existe n nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ satisfaisant les trois conditions suivantes :

- chaque nombre a_i est égal à -1, à 0 ou à 1 ;
- au moins $2n/5$ des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont non nuls ;
- la somme $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n$ est égale à 0.

Note : si vous trouvez une constante $c < 2/5$ pour laquelle vous prouvez que $c \times n$ des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont non nuls, votre copie pourra être valorisée selon valeur de c.

Niveau avancé

Deuxième journée

Chaque problème est noté sur 7 points.

Ces problèmes doivent rester confidentiels jusqu'au lundi 18 mai 2020 à midi (UTC).

Problème 5

Soit $\mathbb{Q}$ l'ensemble des nombres rationnels. Trouver toutes les fonctions $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x)$$

pour tous les nombres rationnels x et y.

Problème 6

Existe-t-il une infinité de triplets d'entiers naturels non nuls (a, b, c) tels que tout facteur premier de $a! + b! + c!$ soit inférieur à 2020 ?

Problème 7

Morgane souhaite colorier chacun des entiers $1, 2, \ldots, 2020$ de sorte que, pour tous les entiers naturels non nuls a et b tels que $a + b \leqslant 2020$, les entiers a, b et $a + b$ ne soient pas coloriés de trois couleurs différentes.

Quel est le nombre maximal de couleurs que Morgane peut utiliser ?

Problème 8

Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et deux à deux distincts. On note D, E et F les pieds respectifs des hauteurs issues de A, B et C dans le triangle ABC. Soit ensuite W un point situé à l'intérieur du triangle ABC, et soit W_a, W_b et W_c les symétriques respectifs de W par rapport aux droites (BC), (CA) et (AB). Enfin, on note N le centre du cercle circonscrit à $W_aW_bW_c$ et I le centre du cercle inscrit dans $W_aW_bW_c$.

Démontrer que, si N coïncide avec le centre du cercle d'Euler de DEF, la droite (WI) est parallèle à la droite d'Euler du triangle ABC.

Remarque : si XYZ est un triangle, O le centre du cercle circonscrit à XYZ et H l'orthocentre de XYZ, la droite (OH) est appelée *droite d'Euler* de XYZ et le milieu du segment $[OH]$ est appelé *centre du cercle d'Euler* de XYZ.