Nivel Avanzado

Día 1

Cada problema vale 7 puntos.

Estos problemas se deben mantener confidenciales hasta el 18 de Mayo 2020, 1200 horas (GMT).

Problema 1

Sea ABC un triángulo con incentro I. El incirculo del triángulo ABC interseca los lados AC y AB en los puntos E y F, respectivamente. Sean ℓ_B y ℓ_C las tangentes al circuncirculo de BIC en B y C, respectivamente. Muestre que existe un círculo tangente a EF, ℓ_B y ℓ_C cuyo centro se encuentra sobre BC.

Problema 2

Geoff tiene una cantidad infinita de dulces, los cuales vienen en n sabores. Distribuye arbitrariamente algunos de los dulces entre n niños (un niño puede obtener dulces de cualquier subconjunto de todos los sabores, incluso el vacío). Llamamos a una distribución de los dulces k-*buena* si todo grupo de k niños tienen en conjunto al menos k sabores. Encuentre todos los subconjuntos S de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tal que si una distribución de dulces es s-buena para todo $s \in S$, entonces es s-buena para todo $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Problema 3

Llamamos a un conjunto de enteros *especial* si tiene cuatro elementos y puede ser particonado en dos conjuntos disjuntos $\{a, b\}$ y $\{c, d\}$ tal que $ab - cd = 1$. Para todo entero positivo n, pruebe que el conjunto $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ no se puede particionar en n conjuntos especiales disjuntos.

Problema 4

Pruebe que para todo entero n, los suficientemente grande existen n numeros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ que satisfacen las tres siguiente condiciones:

- Cada número a_i es igual a -1, 0 o 1.
- Al menos $2n/5$ de los numeros $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son distintos de cero.
- La suma de $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n$ es 0.

Nota: A los resultados con $2/5$ intercambiado con una constante c se les darán puntos dependiendo del valor de c.

NIVEL AVANZADO

DÍA 2

Cada problema vale 7 puntos.

Estos problemas se deben mantener confidenciales hasta el 18 de Mayo 2020, 1200 horas (GMT).

Problema 5

Sea $\mathbb{Q}$ el conjunto de los números racionales. Determine todas las funciones $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ tal que, para todo $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x)$$

Problema 6

Decida si existen infinitas tripletas (a, b, c) de enteros positivos tal que todos los divisores primos de $a! + b! + c!$ son menores a 2020.

Problema 7

Todo entero en $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ se colorea de manera que, para todos los enteros positivos a y b tal que $a + b \leq 2020$, los números a, b y $a + b$ no están coloreados con tres colores distintos. Determine la mayor cantidad de colores que se pueden utilizar.

Problema 8

Sea ABC un triángulo acutángulo escaleno, donde los pies de las alturas desde A, B, C sobre BC, CA, AB son D, E, F respectivamente. Sea W un punto adentro de ABC cuyas reflexiones sobre BC, CA, AB son W_a, W_b, W_c respectivamente. Por último, sea N e I el circuncentro y el incentro de $W_aW_bW_c$ respectivamente. Pruebe que, si N coincide con el centro de nueve puntos de DEF, la línea WI es paralela a la línea de Euler de ABC.

Nota: Si XYZ es un triángulo con circuncentro O y ortocentro H, entonces la línea OH se llama la línea de Euler de XYZ y el punto medio de OH se llama el centro de nueve puntos de XYZ.