Edasijõudnute tase

Esimene võistluspäev

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Allolevaid ülesandeid ei tohi avalikult jagada kuni 18. maini 2020, kellaajani 12.00 (GMT).

Ülesanne 1

Olgu kolmnurga ABC siseringjoone keskpunkt I. Kolmnurga ABC siseringjoon puutub külgi AC ja AB vastavalt punktides E ja F. Olgu ℓ_B ja ℓ_C kolmnurga BIC ümberringjoone puutujad, mis läbivad vastavalt punkte B ja C. Näita, et leidub ringjoon, mis puutub sirgeid EF, ℓ_B ja ℓ_C ning mille keskpunkt asub sirgel BC.

Ülesanne 2

Härmelil on lõpmata palju n erineva maitsega komme. Ta jagab suvaliselt mõned kommid n lapse vahel (iga laps võib saada suvalise alamhulga kõikidest kommimaitsetest, sealhulgas ka tühja hulga ehk null kommi). Ütleme, et kommide jaotus on k-*nunnu*, kui igal k lapsest koosneval hulgal on kamba peale vähemalt k eri maitsega kommi. Leia kõik sellised hulga $\{1, 2, \ldots, n\}$ alamhulgad S, mille korral kehtib järgmine väide: kui suvaline kommide jaotus on s-nunnu iga $s \in S$ jaoks, siis see on s-nunnu iga $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jaoks.

Ülesanne 3

Ütleme, et täisarvude hulk on *eriline*, kui selles on 4 elementi ning selle saab jagada kaheks ühisosata alamhulgaks $\{a, b\}$ ja $\{c, d\}$, nii et $ab - cd = 1$. Tõesta, et mitte ühegi täisarvu n korral ei saa hulka $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ jagada n paarikaupa ühisosata erinevaks eriliseks hulgaks.

Ülesanne 4

Tõesta, et kõikide piisavalt suurte täisarvude n jaoks leiduvad n arvu $a_1, a_2, \ldots, a_n$, mis rahuldavad järgnevat kolme tingimust:

- Iga arv a_i on kas -1, 0 või 1.
- Vähemalt $2n/5$ arvudest $a_1, a_2, \ldots, a_n$ on nullist erinevad.
- Summa $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n$ on 0.

Märkus: Lahendused, kus $2/5$ *asemel saadakse mingi muu konstant* c*, saavad osalisi punkte vastavalt* c *väärtusele.*

EDASIJÕUDNUTE TASE

TEINE VÕISTLUSPÄEV

Iga ülesande õige ja ammendavalt põhjendatud lahendus annab 7 punkti.

Allolevaid ülesandeid ei tohi avalikult jagada kuni 18. maini 2020, kellaajani 12.00 (GMT).

Ülesanne 5

Olgu $\mathbb{Q}$ ratsionaalarvude hulk. Leia kõik funktsioonid $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, mis rahuldavad iga $x, y \in \mathbb{Q}$ korral võrrandit

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x)$$

Ülesanne 6

Kas leidub lõpmata palju positiivsete täisarvude kolmikuid (a, b, c), mille korral on arvu $a! + b! + c!$ kõik algtegurid väiksemad kui 2020?

Ülesanne 7

Kõik täisarvud hulgas $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ värvitakse nii, et kehtiks järgmine tingimus: kui positiivsed täisarvud a ja b rahuldavad tingimust $a + b \leqslant 2020$, siis ei ole arvud a, b ja $a + b$ värvitud kolme eri värviga. Leia maksimaalne kasutatav värvide arv.

Ülesanne 8

Olgu ABC teravnurkne erikülgne kolmnurk ning olgu tippudest A, B, C vastavalt külgedele BC, CA, AB tõmmatud kõrguste aluspunktid D, E, F. Olgu W punkt kolmnurga ABC sees, mille peegeldused üle külgede BC, CA, AB on vastavalt W_a, W_b, W_c. Olgu N ja I vastavalt kolmnurga $W_aW_bW_c$ ümberringjoone ja siseringjoone keskpunkt. Tõesta, et kui N ühtib kolmnurga DEF üheksapunktiringjoone keskpunktiga, siis WI on kolmnurga ABC Euleri sirgega paralleelne.

Märkus: Kui XYZ on kolmnurk ümberringjoone keskpunktiga O ning kõrguste lõikepunktiga H, siis sirget OH kutsutake kolmnurga XYZ Euleri sirgeks ning OH keskpunkti kutsutakse kolmnurga XYZ üheksapunktiringjoone keskpunktiks.