Fortgeschrittenenlevel

Tag 1

Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Diese Aufgaben sind bis Montag 18. Mai 2020 12:00 (GMT) geheim zu halten.

Aufgabe 1

Sei ABC ein Dreieck mit Inkreismittelpunkt I. Der Inkreis von ABC berührt die Seiten AC und AB in den Punkten E bzw. F. Es seien ℓ_B und ℓ_C die Tangenten an den Umkreis von BIC, die durch die Punkte B bzw. C gehen. Man zeige, dass es einen Kreis gibt, der EF, ℓ_B und ℓ_C berührt und dessen Mittelpunkt auf BC liegt.

Aufgabe 2

Die Mathematigerin hat einen unendlichen Vorrat von Süßigkeiten in n verschiedenen Sorten. Sie verteilt einige dieser Süßigkeiten willkürlich an n Kinder (ein Kind kann Süßigkeiten von irgendeiner Teilmenge aller Sorten erhalten, inklusive der leeren Menge). Eine Verteilung der Süßigkeiten heißt k-*nice*, falls jede Gruppe von k Kindern gemeinsam Süßigkeiten in mindestens k Sorten besitzt. Man bestimme alle Teilmengen S von $\{1, 2, \ldots, n\}$, für die gilt: Ist eine Verteilung von Süßigkeiten s-nice für alle $s \in S$, dann ist sie auch s-nice für alle $s \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Aufgabe 3

Eine Menge von ganzen Zahlen heißt *speziell*, falls sie 4 Elemente hat und in 2 disjunkte Teilmengen $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ aufgeteilt werden kann, sodass $ab - cd = 1$ gilt. Man zeige für alle positiven ganzen Zahlen n, dass $\{1, 2, \ldots, 4n\}$ nicht in n paarweise disjunkte spezielle Mengen aufgeteilt werden kann.

Aufgabe 4

Man beweise: Für alle ausreichend großen ganzen Zahlen n gibt es n Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$, welche die folgenden drei Bedienungen erfüllen:

- Jede Zahl a_i ist gleich -1, 0 oder 1.
- Mindestens $2n/5$ der Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sind nicht gleich 0.
- Die Summe $a_1/1 + a_2/2 + \ldots + a_n/n$ ist gleich 0.

Anmerkung: Resultate, in denen $2/5$ durch eine Konstante c ersetzt wurde, erhalten Punkte abhängig vom Wert von c.

FORTGESCHRITTENENLEVEL

TAG 2

Bei jeder Aufgabe können 7 Punkte erreicht werden.

Diese Aufgaben sind bis Montag 18. Mai 2020 12:00 (GMT) geheim zu halten.

Aufgabe 5

Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Man bestimme alle Funktionen $f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, sodass für alle $x, y \in \mathbb{Q}$ gilt, dass

$$f(x)f(y+1) = f(xf(y)) + f(x).$$

Aufgabe 6

Man entscheide, ob unendlich viele Tripel (a, b, c) von positiven ganzen Zahlen existieren, sodass alle Primfaktoren von $a! + b! + c!$ kleiner als 2020 sind.

Aufgabe 7

Jede Zahl in $\{1, 2, 3, \ldots, 2020\}$ wird so gefärbt, dass für alle positiven ganzen Zahlen a und b mit $a + b \leq 2020$ die Zahlen a, b und $a + b$ nicht drei verschiedene Farben haben. Man bestimme die maximal mögliche Anzahl an verwendeten Farben.

Aufgabe 8

Sei ABC ein spitzwinkeliges ungleichseitiges Dreieck und seien die Fußpunkte der Höhen durch A, B und C auf BC, CA bzw. AB die Punkte D, E bzw. F. Seien W ein Punkt im Inneren von ABC und W_a, W_b und W_c die Spiegelungen von W an BC, CA, bzw. AB. Weiters seien N und I der Umkreismittelpunkt bzw. Inkreismittelpunkt von $W_aW_bW_c$. Man zeige: Ist N zusätzlich der Mittelpunkt des Feuerbachkreises von DEF, dann ist WI parallel zur eulerschen Geraden von ABC.

Anmerkung: Ist XYZ ein Dreieck mit Umkreismittelpunkt O und Höhenschnittpunkt H, dann werden die Gerade OH die eulersche Gerade von XYZ und der Mittelpunkt von OH der Mittelpunkt des Feuerbachkreises von XYZ genannt.