المستوى المتقدّم

اليوم الثاني

لكل مسألة سبع درجات

يجب المحافظة على هذه المسائل سريّة حتى يوم الإثنين 18 مايو–أيار الساعة 12:00(GMT)

مسألة 5.

لتكن $\mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد العادية (النسبية). أوجد جميع التوابع (الدوال) $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ التي تحقّق مهما كان x و y من $\mathbb{Q}$ الخاصّة $f(x)f(y+1)=f(xf(y))+f(x)$.

مسألة 6.

بيّن ما إذا كان يوجد عدد لا نهائي من ثلاثيات الأعداد الصحيحة الموجبة تماماً (a,b,c) بحيث تكون جميع القواسم الأوّلية للعدد $a!+b!+c!$ أصغر تماماً من 2020.

مسألة 7.

يجري تلوين كلّ عدد من المجموعة $\{1,2,3,\dots,2020\}$ بحيث مهما كان العددان a و b من هذه المجموعة اللذين يحقّقان $a+b\le 2020$، كانت الأعداد a و b و $a+b$ غير ملوّنة بثلاثة ألوان مختلفة. أوجد أكبر عدد من الألوان يمكن استعماله لتحقيق ذلك.

مسألة 8.

ليكن ABC مثلثاً مختلف الأضلاع وحاد الزوايا، ولتكن D و E و F مواقع الأعمدة النازلة من الرؤوس A و B و C على الأضلاع BC و CA و AB بالترتيب. لتكن W نقطة داخل ABC، ولتكن W_a و W_b و W_c انعكاساتها (نظائرها) بالنسبة إلى المستقيمات BC و CA و AB بالترتيب. وأخيراً ليكن N مركز الدائرة المارة برؤوس المثلث $W_aW_bW_c$، وليكن I مركز الدائرة الماسّة لأضلاع المثلث $W_aW_bW_c$ داخلاً. أثبت أنّه إذا انطبقت N على مركز دائرة النقاط التسع للمثلث DEF كان المستقيم WI موازياً لمستقيم أويلر للمثلث ABC.

ملاحظة: إذا كان XYZ مثلثاً مركز الدائرة المارة برؤوسه O ونقطة تلاقي ارتفاعاته H، عندئذ يسمى المستقيم OH مستقيم أويلر في المثلث XYZ، ويكون منتصف القطعة المستقيمة OH هو مركز دائرة النقاط التسع للمثلث XYZ.

المستوى المتقدّم

اليوم الأوّل

لكل مسألة سبع درجات

يجب المحافظة على هذه المسائل سريّة حتى يوم الإثنين 18 مايو–أيار الساعة 12:00(GMT)

مسألة 1.

ليكن ABC مثلثاً. وليكن I مركز الدائرة الماسة الأضلاعه داخلاً. تمسّ هذه الدائرة الضلعين AC و AB في E و F بالترتيب. ليكن ℓ_B و ℓ_C مماسي الدائرة المارة بروؤس المثلث BIC في B و C بالترتيب. أثبت وجود دائرة تمس كلاً من EF و ℓ_B و ℓ_C ويقع مركزها على المستقيم BC.

مسألة 2.

لدى جِف مخزوناً لا نهائياً من قطع الحلوى التي تأتي بعدد n من النكهات المختلفة. يوزّع كيفياً بعضاً من قطع الحلوى هذه على n طفلاً. (يمكن لطفل أن يحصل على أية مجموعة من النكهات، بما فيها المجموعة الخالية). نقول إنّ مثل هذا التوزيع لقطع الحلوى هو توزيع k–لطيفٌ إذا كانت قطع الحلوى لدى أي مجموعة مكونة من k طفلاً تضمّ k نكهة على الأقل. أوجد جميع المجموعات الجزئية S من $\{1,2,\dots,n\}$ التي تحقّق أنّه إذا كان توزيعٌ لقطع الحلوى توزيعاً s–لطيفاً مهما كانت s من S فعندئذ يكون هذا التوزيع s–لطيفاً مهما كانت s من $\{1,2,\dots,n\}$.

مسألة 3.

تقول عن مجموعة من الأعداد الصحيحة إنّها **مميّزة** إذا كانت مؤلفة من 4 عناصر ويمكن تجزئتها إلى مجموعتين جزئيتين منفصلتين $\{a,b\}$ و $\{c,d\}$ بحيث $ab-cd=1$. لكل عدد صحيح موجب تماماً n، أثبت أنّه لا يمكن تجزئة المجموعة $\{1,2,\dots,4n\}$ إلى n من المجموعات الجزئية المنفصلة التي كل منها مجموعة مميزة.

مسألة 4.

أثبت أنّه من أجل جميع الأعداد الصحيحة n الكبيرة بقدر كافٍ، يوجد n عدداً $a_1,a_2,\dots,a_n$ تحقق الشروط الثلاثة الآتية:

- كلّ a_i يساوي -1 أو 0 أو 1.
- هناك على الأقل نسبة $2n/5$ من الأعداد $a_1,a_2,\dots,a_n$ لا يساوي الصفر.
- المجموع $\frac{a_1}{1}+\frac{a_2}{2}+\dots+\frac{a_n}{n}$ يساوي 0.

ملاحظة: النتائج التي يُستبدل فيها بالعدد $2/5$ عدداً آخر c، ستكافأ بدرجات تبعاً لقيمة c.